ПРИМЕНЕНИЕ ФИЛЬТРА КАЛМАНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ОШИБКАХ ИЗМЕРЕНИЙ

Е.Н. Гончарова

Решение задачи численного дифференцирования имеет большое практическое значение, особенно при обработке результатов измерений и при численном решении дифференциальных уравнений. Обычно задача численного дифференцирования решается на основе интерполяционного полинома Ньютона. При этом для вычисления производной m-го порядка в каждом из n узлов необходимо вычислять конечные разности от m до n-го порядка. Вычисление конечных разностей для каждого узла представляет собой достаточно трудоемкую задачу, с одной стороны, с другой – сопровождается значительными ошибками, особенно в тех случаях, когда измерения сопровождаются случайными ошибками. Кроме того, при таком подходе необходимо вначале накапливать информацию, а затем строить интерполирующий полином, т.е. в этом случае затруднена процедура определения производных в темпе поступления новых результатов измерений.

В этой связи нами разработан алгоритм вычисления производных, использующий фильтр Калмана, который позволяет в реальном времени построить оценку производных, основываясь на измерениях, неизбежно содержащих погрешности.

Пусть некоторая функция $f(t)$ заданна таблицей значений в равноотстоящих узлах $t_0, t_1, \ldots, t_n$ $f(t_0), f(t_1), \ldots, f(t_n)$, тогда данную функцию можно интерполировать полиномом n-го порядка вида [3]:

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots + a_n t^n, \qquad (1)$$

Пусть имеются результаты измерений с ошибками $y(t) = f(t) + v(t)$, тогда степенной полином (1) можно представить в виде системы однородных дифференциальных уравнений первого порядка в пространстве состояний [1]

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t), \\ y(t) = ax(t) + v(t), \end{cases} \qquad (2)$$

где $v(t)$ – ошибки измерения. Данную систему использовать невозможно в силу того, что может быть неизвестна строка a. Это значит, что алгоритм фильтра Калмана реализовать невозможно. Однако это затруднение можно преодолеть, преобразуя систему (2) к эквивалентной системе однородных дифференциальных уравнений [2],

$$\begin{cases} \xi(t) = F\xi(t), \\ y(t) = c\xi(t) + v(t), \end{cases} \qquad (3)$$

в которой каждая компонента вектора состояний в соответствии с ее порядковым номером в столбце является производной соответствующего порядка. Система (3) является эквивалентной по выходу системой с неизвестными начальными условиями $\xi(0)$, но с заданной строкой вывода c. Преобразование подобия может быть построено так, что матрица перехода F размера $(n+1)\times(n+1)$ и строка c будут иметь вид [2]

$$f=\begin{bmatrix}0&1&0&\dots&0&0\\0&0&1&\dots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\dots&1&0\\0&0&0&\dots&0&1\\0&0&0&\dots&0&0\end{bmatrix},\ c=[1\,0\,0\dots0\,0].$$

Такой подход сводит задачу дифференцирования к задаче интегрирования однородной системы дифференциальных уравнений первого порядка. Исследование наблюдаемости полученной системы показало, что при решении задачи дифференцирования все производные от 0 до n порядков могут быть определены. Применение алгоритма фильтра Калмана позволяет получить производные при имеющихся ошибках измерений.

Рассмотрим дискретный алгоритм фильтра Калмана – Бьюси. Будем считать что модель $y(t)=ax(t)+v(t)$ преобразована к дискретному виду

$$\begin{cases}\xi(k+1)=\Phi\xi(k),\\ y(k)=c\xi(k)+v(k),\end{cases}\tag{4}$$

где $\Phi=E+\sum_{i=1}^{n}F^i\frac{h^i}{i!}$, h – шаг измерений. Учитывая, что система однородна, для данной модели алгоритм фильтра Калмана сразу записывается как частный случай, изложенного в [3] алгоритма для системы, на входе которой действует белый шум:

$$\begin{aligned}\hat{\xi}(k+1)&=\varPhi\hat{\xi}(k)+K(k+1)\times\\&\times[y(k+1)-c\cdot\varPhi\cdot\hat{\xi}(k)];\end{aligned}\tag{5}$$

$$K(k+1)=\frac{P(k+1/k)c^T(k+1)}{[cP(k+1/k)c^T+D_v(k+1)]};\tag{6}$$

$$P(k+1/k)=\varPhi\cdot P(k)\cdot\varPhi^T;\tag{7}$$

$$P(k+1)=[E-K(k+1)c]P(k+1/k)].\tag{8}$$

При этом оценка вектора неизвестных параметров будет равна $\hat{x}(k)=c\cdot\hat{\xi}(k)$.

Выпишем алгоритм фильтра Калмана в поэлементной форме, которая будет использована при программировании. Очевидно, что из (5) следует

$$\begin{bmatrix}\hat{\xi}_0(k+1)\\\hat{\xi}_1(k+1)\\\dots\\\hat{\xi}_m(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&h&\dots&\frac{h^n}{n!}\\0&1&\dots&\frac{h^{n-1}}{(n-1)}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\hat{\xi}_0(k)\\\hat{\xi}_1(k)\\\dots\\\hat{\xi}_m(k)\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}K_0(k+1)\\K_1(k+1)\\\dots\\K(k+1)\end{bmatrix}\times$$

$$\times\left[y(k+1)-[c_1\dots c_m]\begin{bmatrix}1&h&\dots&\frac{h^n}{n!}\\0&1&\dots&\frac{h^{n-1}}{(n-1)}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\dots&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\hat{\xi}_0(k)\\\hat{\xi}_1(k)\\\dots\\\hat{\xi}_m(k)\end{bmatrix}\right].\tag{9}$$

Обозначив

$$\nu(k+1)=y(k+1)-\hat{\xi}_1(k)\tag{10}$$

для любого $\hat{\xi}_i(k)$, будем иметь

$$\hat{\xi}_i(k+1)=\varPhi_i\cdot\hat{\xi}_i(k)+K_i(k+1)\nu(k+1)$$
$$(i=\overline{1,m}).\tag{11}$$

Аналогично равенство (7) запишем в виде

$$\begin{bmatrix} P_{11}(k+1/k) & \dots & P_{1m}(k+1/k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{m1}(k+1/k) & \dots & P_{mm}(k+1/k) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & h & \dots & \frac{h^n}{n!} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} P_{11}(k+1/k) & \dots & P_{1m}(k+1/k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{m1}(k+1/k) & \dots & P_{mm}(k+1/k) \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ h & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ \frac{h^n}{n!} & \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \qquad (12)$$

Из (12) следует, что

$$P_{ij}(k+1/k) = \Phi_i P_{ij}(k) \Phi_j^T \;\; (i, j = \overline{1,m}). \qquad (13)$$

В свою очередь блочная запись равенства (8) имеет вид

$$\begin{bmatrix} P_{11}(k+1) & \dots & P_{1m}(k+1) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{m1}(k+1) & \dots & P_{mm}(k+1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} P_{11}(k+1/k) & \dots & P_{1m}(k+1/k) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{m1}(k+1/k) & \dots & P_{mm}(k+1/k) \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} K_1(k+1) \\ \dots \\ K_m(k+1) \end{bmatrix} \cdot [c_1 \dots c_m] \times \qquad (14)$$

$$\times \begin{bmatrix} P_{11}(k+1/k) & \dots & P_{1m}(k+1/k) \\ \dots & \dots & \dots \\ P_{m1}(k+1/k) & \dots & P_{mm}(k+1/k) \end{bmatrix}.$$

Выполняя перемножение матриц в правой части (14), для любого $i; j$-го элемента матрицы $P(k+1)$ найдем

$$P_{ij}(k+1) = P_{ij}(k+1/k) - - K_i(k+1) \cdot \sum_{i=1}^{m} c_i P_{ij}(k+1/k). \qquad (15)$$

Из выражения (6) получим

$$K(k+1) = \sum_{j=1}^{m} P_{ij}(k+1/k) c_j^T \times \times \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_i P_{ij}(k+1/k) c_j^T + D_v \right]^{-1}. \qquad (16)$$

Если обозначить

$$\left. \begin{aligned} \hat{\xi}_i(k+1) &= \Phi \cdot \hat{\xi}(k) \\ \hat{x}(k+1) &= c \cdot \hat{\xi}(k+1/k) \end{aligned} \right\}, \qquad (17)$$

то будем иметь

$$\nu(k+1) = y(k+1) - F(k+1)\hat{x}(k+1/k). \qquad (18)$$

Тогда алгоритм фильтра Кальмана в поэлементной форме запишется в виде:

1. Выражение оценки i-го вектора состояний

$$\hat{\xi}_i(k+1) = \hat{\xi}_i(k+1/k) + K_i(k+1)\nu(k+1),$$
$$(i = \overline{1,m}).$$

2. Прогноз оценки i-го вектора состояний

$$\hat{\xi}_i(k+1/k) = \Phi_i \cdot \hat{\xi}_i(k).$$

3. Прогноз оценки неизвестного параметра

$$\hat{x}(k+1/k) = c \cdot \hat{\xi}(k+1/k).$$

4. Выражение невязки

$$\nu(k+1) = y(k+1) - F(k+1)\hat{x}(k+1/k).$$

5. Элементы априорной матрицы ошибок оценивания

$$P_{ij}(k+1/k) = \Phi_i P_{ij}(k) \Phi_j^T \;\; (i, j = \overline{1,m}).$$

6. Элементы матрицы коэффициентов передачи фильтра

$$K_j(k+1) = \sum_{j=1}^{m} P_{ij}(k+1/k) c_j^T \times \times \left[\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_i P_{ij}(k+1/k) c_j^T + D_v \right]^{-1}.$$

7. Элементы матрицы ошибок оценивания

$$P_{ij}(k+1) = P_{ij}(k+1/k) -$$
$$- K_i(k+1) \cdot \sum_{i=1}^{m} c_i P_{ij}(k+1/k).$$

8. Оценки вектора неизвестных параметров

$$\hat{x}(k) = c \cdot \hat{\xi}(k).$$

Таким образом, приведенный алгоритм решает задачу оценки неизвестного вектора $\hat{x}(k)$, каждая компонента которого является производной от 0 до n-го порядка соответственно, на основе применения фильтра Калмана – Бьюси. Нами разработана компьютерная программа, позволяющая производить расчеты оценок как самой функции, так и производных 1 и 2 порядков.

Пример. Пусть имеются результаты измерений некоторого процесса, записанные в виде табличной функции. Ошибки измерений интерпретируются как нормальный белый шум. Пусть для простоты $y(x) = x^2 + v$, где v – случайная величина с 0 математическим ожиданием. На рисунке приведены результаты расчетов при $h = 0.1$ с использованием фильтра Калмана.

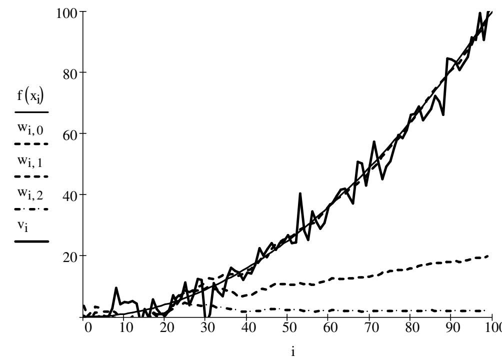

Рис. $f(x)$ – точные значения; v – измерения с ошибками; $w_{i,0}$ – оценки значений функции; $w_{i,1}$ – оценки значений первой производной; $w_{i,2}$ – оценки значений второй производной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колосов Л.В., Гончарова Е.Н.. Об одном методе численного дифференцирования временных рядов // Вестник Ставропольского государственного университета. – 1996. – №7.*
2. *Колосов Л.В., Суйменбаев В.Т. Об одном подходе идентификации нестандартных систем // Информационно-измерительные устройства. – М.: МАИ им С. Орджоникидзе, 1979.*
3. *Жданюк Б.Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений. – М.: Советское радио, 1978.*

Об авторе

Гончарова Елена Николаевна, старший преподаватель кафедры прикладной математики и информатики СГУ. Сфера научных интересов – численное дифференцирование. Автор более 20 научных и методических работ.